

# Probabilistische Methoden in der strukturmechanischen Auslegung grosser stationärer Gasturbinen

## Anwendung und produktspezifische Anwendungsgrenzen

Roland Mücke und Armin Heger  
ALSTOM, Baden / Schweiz

### Einleitung

Probabilistische Auslegungsverfahren werden seit vielen Jahren in verschiedenen Gebieten des Maschinenbaus erfolgreich eingesetzt [1-2]. Insbesondere im Fahrzeugbau sind probabilistische Methoden bei Crashsimulationen und Robustheitsbewertungen heute weit verbreitet [3-4]. Dagegen lassen in der Entwicklung grosser stationärer Gasturbinen zur Stromerzeugung geringe Stückzahlen, lange Lebensdauern der Turbinenkomponenten und grosse Inspektionsintervalle den Einsatz probabilistischer Auslegungsmethoden zunächst schwierig erscheinen. Insbesondere erschwert der im Vergleich zu Grossserienprodukten geringe Erfahrungsrückfluss die zuverlässige statistische Aufbereitung der Daten. Ausserdem sind zulässige Ausfallwahrscheinlichkeiten für sicherheits- oder funktionsrelevante Komponenten ausserordentlich gering, da bereits jedes Einzelereignis, das zum Abschalten oder sogar zum Öffnen einer Kraftwerksturbine führt, hohe Kosten verursacht. Dennoch sind inzwischen mehrere Projekte zur Anwendung probabilistischer Auslegungsverfahren abgeschlossen, die sowohl das Potenzial der Methode, wie auch deren Anwendungsgrenzen im Bereich des Turbomaschinenbaus deutlich aufzeigen.

Im Beitrag werden zunächst Anwendungsbeispiele probabilistischer Auslegungsverfahren aus der Turbinenschaukel- und Rotorauslegung für grosse stationäre Gasturbinen kurz skizziert sowie auf entsprechende Referenzen mit detaillierten Beschreibungen verwiesen. Es werden dann die Grenzen probabilistischer Auslegungsmethoden im Anwendungsbereich der Autoren diskutiert. Insbesondere wird an einem einfachen und leicht nachvollziehbaren Beispiel der Einfluss der Verteilungsfunktionen der stochastischen Eingangsgrössen auf Lebensdauervorhersage bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten und auf Sensitivitätsanalysen gezeigt. Weiterhin wird auf die Auswahl geeigneter unabhängiger stochastischer Designparameter hingewiesen sowie Erfahrungen bezüglich Akzeptanz und Validierung probabilistischer Methoden im industriellen Umfeld diskutiert. Der zweite Teil des Beitrages verfolgt dabei das Ziel, wichtige Gründe für den bisher nur sporadischen Einsatz probabilistischer Auslegungsmethoden in der Entwicklung grosser stationärer Gasturbinen aufzuzeigen, um damit den Forschenden auf diesem Gebiet Hinweise für die Weiterentwicklungen der Methode zu geben.

### Abkürzungen

|           |   |
|-----------|---|
| ABAQUS    | Finite-Elemente-Analyse Tool                            |
| ANSYS     | Finite-Elemente-Analyse System                          |
| ProSi     | Probabilistik Simulation Tool [5-6]                     |
| Promenvir | Probabilistic Mechanical Design Environment [7]         |
| ST-ORM    | Stochastische Optimierung und Robustheit Management [8] |
| @Risk     | Excel basiertes Probabilistik-Tool                      |
| LCF / TMF | Low Cycle Fatigue / Thermo-Mechanical Fatigue           |
| TBC       | Thermal Barrier Coating                                 |

## Ausgewählte Beispiele zur Anwendung probabilistischer Auslegungsmethoden im Gasturbinenbau

In diesem Abschnitt werden drei Beispiele für Anwendungen probabilistischer Auslegungsmethoden in der Entwicklung grosser stationärer Gasturbinen beschrieben. Natürlich sind damit die heutigen Anwendungsgebiete probabilistischer Methoden bei weitem nicht erschöpft. Insbesondere werden probabilistische Verfahren eingesetzt für:

- die statistische Auswertung von Materialdaten,
- die statistische Auswertung von Felddaten,
- die Berücksichtigung stochastischer Belastungsspektren, z.B. beim Nachweis der Erdbebensicherheit kraftwerkstechnischer Anlagen,
- die Berücksichtigung streuender Werkstoffparameter im Rahmen der probabilistischen Bruchmechanik, der probabilistische Low Cycle Fatigue (LCF) Analyse und bei der Auslegung von Bauteilen aus spröden Werkstoffen mittels Weibull-Charakteristik,
- die Analyse der Robustheit wichtiger Turbinensysteme, z.B. des Secondary Air Flow (SAF) Systems, mittels Monte-Carlo-Simulationen.

Dieser Beitrag und insbesondere die gezeigten Anwendungen beschränken sich auf den Einsatz probabilistischer Methoden in der strukturmechanischen Auslegung hochbelasteter Turbinenkomponenten. Auf diesem Gebiet wurden zwar einzelne Projekte abgeschlossen. Probabilistische Auslegungsmethoden werden aber nach wie vor nur sporadisch eingesetzt und zählen heute nicht zum täglichen Werkzeug des Berechnungsingenieurs.

### Lebensdaueranalysen für gekühlte Gasturbinenschaufeln

In einem Pilotprojekt vor nunmehr 10 Jahren wurde die Anwendbarkeit der Monte-Carlo-Simulationemethode auf die Vorhersage der zyklischen Lebensdauer (LCF/TMF) von gekühlten Gasturbinenkomponenten gezeigt. Um den numerischen Aufwand der Untersuchungen in tolerierbaren Grenzen zu halten, wurde zunächst aus 3D Finite-Elemente-Simulationen der gesamten Turbinenschaufel ein 2D Schaufelblattschnitt identifiziert, der für die Gesamtkomponente lebensdauerbegrenzend ist. An diesem vereinfachten 2D Schaufelblattmodell wurden dann detaillierte probabilistische Analysen durchgeführt.

Abbildung 1 zeigt den schematischen Aufbau der dafür verwendeten Software-Umgebung. Für die thermischen und strukturmechanischen Berechnungen wurde das FE-Programmsystem ABAQUS verwendet. Die Anrisslastspielzahl wurde mit einem firmeninternen Lebensdauer-Analyse-Programm ermittelt, das auf Materialparameter aus einer entsprechenden Datenbank sowie auf die Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen zurückgreift. Der probabilistische Teil der Analysen wurde mit dem Probabilistik-Programm Promenvir<sup>1)</sup> realisiert. Um die stochastischen Variablen in Analysevariablen

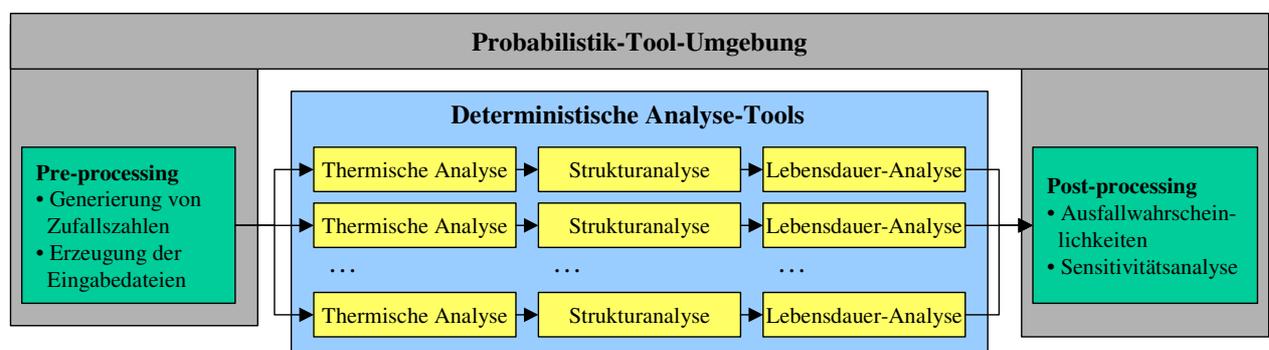


Abbildung 1: Aufbau der Software-Umgebung für strukturmechanische probabilistische Auslegungen.

<sup>1)</sup> Promenvir [7] wurde in das Produkt ST-ORM [8] integriert einem Meta-Computing Tool für Stochastische Optimierung und Robustheit Management, das insbesondere im Fahrzeugbau für Crash-Simulationen breite Anwendung fand.

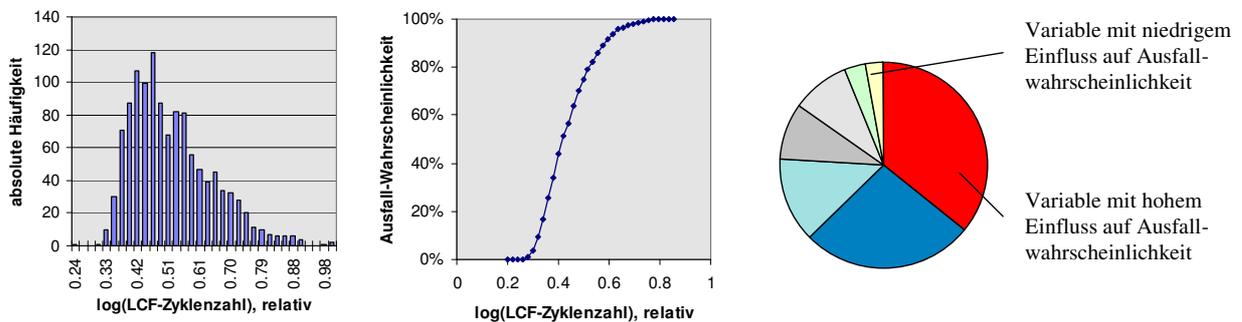
zu transferieren (also in Eingangsgrößen der Finite-Elemente-Analysen) mussten Schnittstellen-Programme den Finite-Elemente-Simulationen vorgeschaltet werden.

In Abbildung 2 sind die verwendeten stochastischen Variablen zusammengestellt. Dabei ist auffallend, dass zunächst keine Geometrieparameter variiert wurden (der Einfluss der TBC Dicke wurde mit effektiven Wärmeübergangskoeffizienten abgebildet), da zu jener Zeit hinreichend stabile CAD Tools zur parametrischen Modellierung noch nicht zur Verfügung standen.

| Belastungsparameter            | Verteilung | Materialparameter        | Verteilung  |
|--------------------------------|------------|--------------------------|-------------|
| Thermische Last heissgasseitig | Normal     | Therm. Ausdehnungskoeff. | Normal      |
| Adiabate Wandtemperatur        |            | TBC Wärmeleitkoeffizient | Normal      |
| Wärmeübergangskoeffizient      |            | Elastizitätsmodul        | Normal      |
| Thermische Last kühlflutseitig | Normal     | LCF-Ermüdungsfestigkeit  | Log-Normal  |
| Kühlfluttemperatur             |            |                          |             |
| Wärmeübergangskoeffizient      |            |                          |             |
| Mechanische Belastung          | Normal     | Geometrieparameter       | Verteilung  |
| Druckbelastung                 |            | TBC Dicke                | Gleichvert. |

**Abbildung 2: Stochastische Modellparameter.**

Als Ergebnis der probabilistischen Simulationen wurden einerseits die Verteilungsfunktionen wichtiger Ergebnisgrößen, wie z.B. maximale Spannung, maximale Temperatur und minimale LCF Zyklenzahl bestimmt, Abbildung 3. Andererseits konnten mittels Rangkorrelationskoeffizienten jene Einflussgrößen identifiziert werden, die wesentlich zur Streuung der jeweiligen Ergebnisgröße beitragen.



**Abbildung 3: Ergebnisse einer probabilistischen Lebensdauer-Analyse.**

In diesem ersten Pilotprojekt wurden ausschliesslich Monte-Carlo-Simulationen basierend of Latin-Hypercube-Sampling (LHS) benutzt. Dabei waren 1200 Berechnungsläufe notwendig. Da sich die Untersuchung auf einen 2D Schaufelblattschnitt beschränkte, wurden sämtliche Computer-Analysen innerhalb von 12 Stunden ermöglicht.

Für eine weiterführende detaillierte Darstellung der Methodik und der Ergebnisse dieses Beispiels wird auf die Referenzen [9-10] verwiesen. Ähnliche probabilistische Analysen wurden anschliessend für mehrere Turbinenkomponenten durchgeführt, insbesondere für gekühlte Lauf- und Leitschaufeln der ersten Turbinenstufen sowie für Wärmeschutzschilde.

Ausgehend von den Ergebnissen des oben genannten Projektes wurden gemeinsam mit dem Institut für Strömungsmechanik der TU Dresden, Rolls-Royce Deutschland sowie der MTU Aero Engines zwei Forschungsprojekte initiiert, mit dem Ziel, die Anwendbarkeit probabilistischer Auslegungsmethoden für industriennahe Anwendungen im Turbomaschinenbau zu verbessern [5-6].

## TBC Lebensdauerberechnung

Neben probabilistischen Strukturanalysen wurden probabilistische Methoden für die Entwicklung spezifischer Auslegungskriterien eingesetzt. Als Beispiel wird hier die probabilistische Analyse von TBC-Beschichtungen kurz skizziert. Weitere Details sind in Referenz [11] enthalten.

Hohe thermodynamische Wirkungsgrade von Gasturbinen bedingen Verbrennungstemperaturen, die deutlich über der Schmelzgrenze moderner hochfester Superlegierungen liegen. Um die Metalltemperaturen auf ein erträgliches Niveau zu reduzieren, müssen Komponenten im Heissgaspfad von Gasturbinen entsprechend gekühlt werden. Zusätzlich werden meist keramische Beschichtungen (TBC, Thermal Barrier Coating) auf Oberflächen gekühlter Komponenten aufgebracht, die aufgrund ihrer niedrigen Wärmeleitfähigkeit die Metalltemperatur im Bondcoat und im Grundmaterial weiter beträchtlich reduzieren, Abbildung 4.

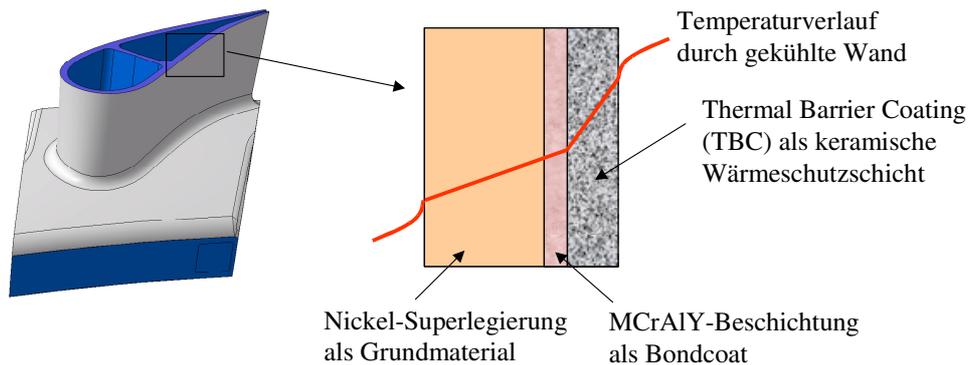


Abbildung 4: Temperaturgradienten bei TBC beschichteten Bauteilen.

Bei der Beschichtung von Bauteilen mittels Plasmaspritzverfahren unterliegen sowohl die Bondcoat-Dicke wie auch die TBC-Dicke bestimmten Streuungen, die die Lebensdauer beschichteter Bauteile beeinflussen. Abbildung 5 zeigt schematisch ein einfaches Auslegungsmodell, das diese Streuungen berücksichtigt und für die Entwicklung von Auslegungsrichtlinien für TBC beschichtete Bauteile benutzt worden ist. Dabei werden die Bondcoat-Dicke sowie die TBC-Dicke mit Dreiecksverteilungsfunktionen beschrieben, die aus Schichtdickenmessungen bestimmt wurden, Abbildung 6. Ein einfaches Wärmeleitmodell ermittelt die Temperatur im Bondcoat in Abhängigkeit der Coating-Dicken. Die mechanische Belastung der TBC-Schicht wird aus den Ergebnissen von 3D Strukturanalysen und Materialtests ermittelt. Die deterministischen mechanischen Belastungen und die

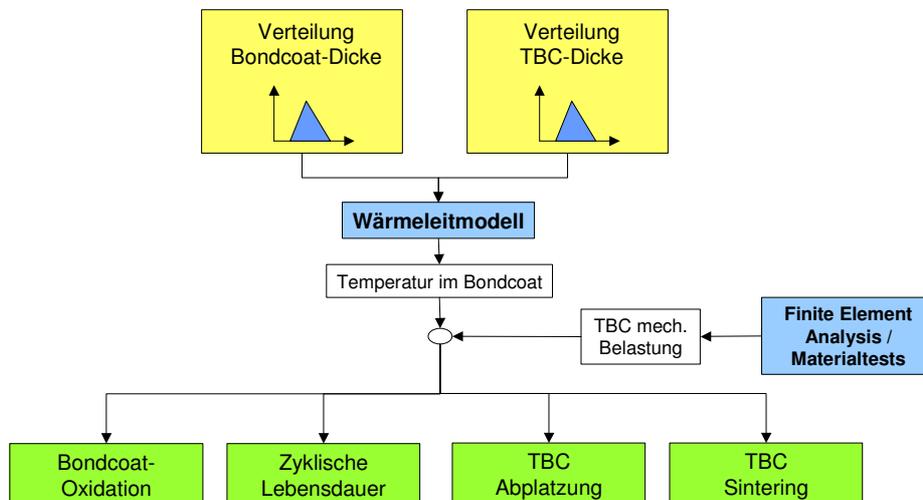


Abbildung 5: TBC Auslegung unter Einbeziehung von Bondcoat und TBC Dicken-Verteilungen.

berechneten Verteilungen der Bondcoat-Temperaturen sind dann Eingangsgrößen für ein TBC Lebensdauermodell, das die typischen TBC Fehlermechanismen wie Bondcoat-Oxidation, zyklische Lebensdauer, TBC Abplatzung und TBC Sintering berücksichtigt.

Abbildung 6 zeigt typische Verteilungsfunktionen von Bondcoat-Dicke und TBC-Dicke, die üblicherweise aus 70-90 Messungen erzeugt werden. Dabei wird deutlich, dass, obwohl umfangreiche Messungen vorliegen, die vorhandenen Messdaten nur sehr grob mit speziellen Verteilungsfunktionen beschrieben werden können. Bei Coating-Dicken hat sich die Dreiecksverteilung als bester Fit erwiesen.

Abbildung 6 zeigt exemplarisch die berechneten Verteilungsfunktionen für Bondcoat-Oxidation und TBC Abplatzung. Die probabilistischen Untersuchungen weisen darauf hin, dass TBC Abplatzungen oberhalb eines spezifischen Belastungsgrenzwertes mit hoher Häufigkeit auftreten (wie es für keramische Bauteile typisch ist), während die Verteilungsfunktion der Bondcoat-Oxidation weniger kritisch verläuft.

Die beschriebenen Untersuchungen wurden mit dem Excel basierten Tool @Risk durchgeführt. Es wurden 10'000 Monte-Carlo-Simulationen (Latin-Hypercube-Sampling) verwendet. Die Rechenzeit betrug wenige Sekunden. Für weitere Details siehe Referenz [11]. Weitere Informationen zu TBC-Fehlermechanismen sind in Referenz [12] enthalten.

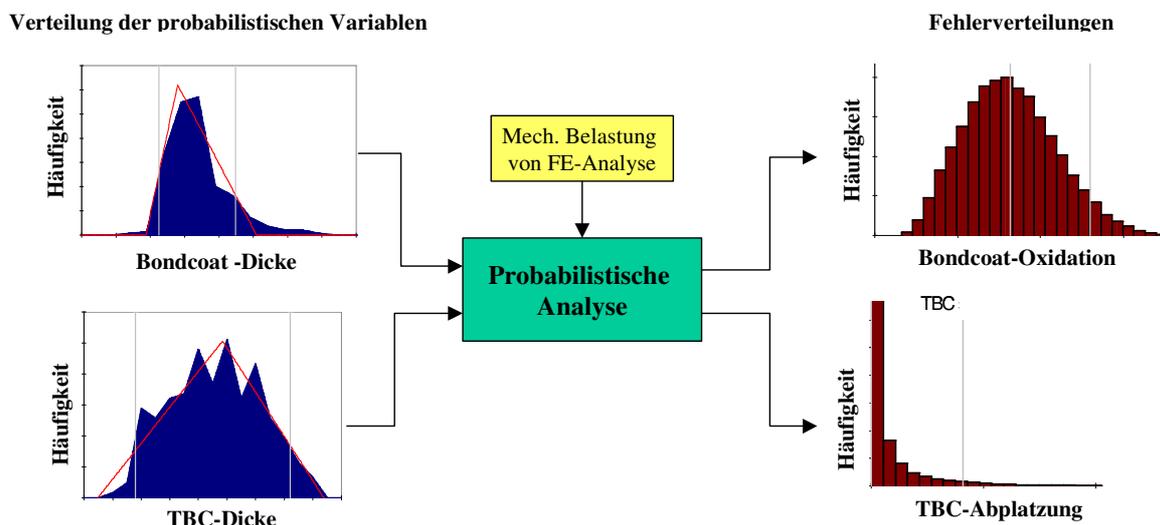


Abbildung 6: Gemessene Verteilungen von Bondcoat und TBC-Dicke und berechnete Verteilung der Bondcoat-Oxidation und der TBC-Abplatzung.

## Auslegung von Rotorberstversuchen

Die Berstfestigkeit von Rotoren (Wellen) ist eine wesentliche Sicherheitskomponente im Gasturbinenbau. Während die Berstfestigkeit für Flugtriebwerke experimentell gezeigt werden muss, werden für stationäre Gasturbinen rechnerische Nachweise mit grossen Sicherheitsreserven akzeptiert.

Mit der Finite-Elemente-Methode lassen sich Berstvorgänge inzwischen gut simulieren. Die programmierten Verfahren erlauben es, bis zu sehr grossen Dehnungen zu rechnen, bevor die Iterationen aufgrund numerischer Instabilitäten abgebrochen werden. Wird dabei die Dehnungszunahme über der simulierten Drehzahl aufgetragen, ist zu erkennen, dass beim Erreichen des numerischen Abbruchkriteriums durch den sehr steilen Anstieg der Dehnungskurve ein sehr enger Drehzahlbereich für die zu erwartende Berstdrehzahl angegeben werden kann.

In der nachfolgend beschriebenen Untersuchung sollte experimentell verifiziert werden, dass die errechnete Instabilitätsdrehzahl mit der tatsächlichen Berstdrehzahl überein stimmt. Da die Rotationsenergie  $E$  mit der 4. Potenz des Radius  $r$  zunimmt,  $E \sim \omega^2 r^4$  (für die Scheibenspannung  $\sigma$  gilt  $\sigma \sim \omega^2 r^2$ ), sind Berstversuche an realen Rotorscheiben für Kraftwerksturbinen nicht durchführbar,

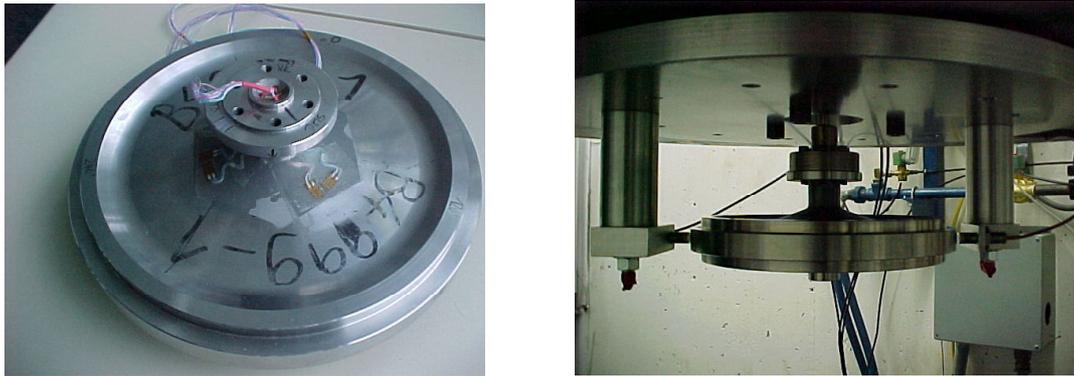


Abbildung 7: Rotorscheibe und Versuchsaufbau.

weil die beim Bersten freiwerdende Energie in bestehenden Schleudernanlagen nicht absorbiert werden kann. Deshalb wurden kleine Modellscheiben bei hohen Spannungen respektive hoher Drehzahl getestet, Abbildung 7. Die in Schleudernanlagen maximal erreichbaren Drehzahlen werden damit zum bestimmenden Auslegungsparameter für Testscheiben.

Die durchgeführten probabilistischen Untersuchungen hatten das Ziel, eine optimale Größe der Testscheibe zu bestimmen. Insbesondere musste sichergestellt werden, dass auch bei variierenden Materialparametern die Berstdrehzahl erreicht wird.

Bei der Simulation der Berstdrehzahl wurden nichtlineare Materialeigenschaften und grosse Verformungen berücksichtigt. Es wurden an einem axialsymmetrischen Finite-Elemente-Modell der Rotorscheibe über 1'000 Monte-Carlo-Simulationen mit Latin Hypercube Sampling durchgeführt. Sämtliche Berechnungen, einschliesslich der probabilistischen Analysen, wurden mit dem Programmsystem ANSYS durchgeführt.

In Abbildung 8 ist ein Vergleich von simulierter und gemessener Vergrößerung des Scheibendurchmessers dargestellt. Dieser belegt die hohe Genauigkeit des verwendeten Materialmodells – eine wesentliche Voraussetzung einer realitätsnahen Simulation. Ebenfalls in Abbildung 8 ist die berechnete Streuung der Berstdrehzahl mit einem Mittelwert von ca. 54'000 rpm und einer Standardabweichung von ca. 1'350 rpm gezeigt. Die maximale Drehzahl der Schleudernanlage mit 60'000 rpm war also mehr als das 4.5-fache der Standardabweichung vom Mittelwert der Berstdrehzahl entfernt. Mittels probabilistischer Simulation konnte somit gezeigt werden, dass die zu untersuchende Rotorscheibe mit hinreichend hoher Wahrscheinlichkeit zum Bersten gebracht wird.

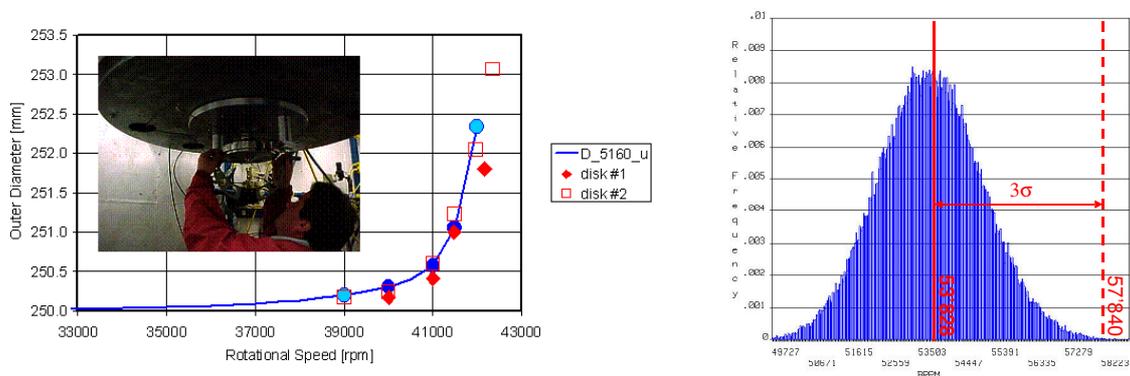


Abbildung 8: Vergleich von simulierter und gemessener Vergrößerung des Scheibendurchmessers (links) und berechnete Streuung der Bestdrehzahl (rechts).

## Anwendungsgrenzen probabilistischer Auslegungsmethoden

Die oben gezeigten Beispiele - wie auch weitere hier nicht genannte Anwendungen - belegen eindrucksvoll das Potenzial probabilistischer Auslegungsmethoden im Turbinenbau. In den Untersuchungen haben sich aber auch Grenzen der Anwendbarkeit probabilistischer Auslegungsmethoden im industriellen Umfeld gezeigt, die im Folgenden diskutiert werden sollen. Dazu werden zunächst vier Thesen aufgestellt, die anschliessend u.a. anhand eines einfachen und nachvollziehbaren Beispiels näher erläutert werden.

1. Die Verteilungsfunktionen der meisten probabilistischen Variablen sind a priori nicht bekannt und können oftmals nur aus wenigen Messungen geschätzt werden. Andererseits sind Lebensdaueraussagen für kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten (wie sie heute fast überall gefordert sind, Tabelle 1) stark von den Verteilungsfunktionen der stochastischen Variablen bestimmt. Kleine Abweichungen vor allem in den „Schwänzen“ der (geschätzten) Verteilungsfunktionen führen zu grossen Variationen in den Lebensdaueraussagen für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten.
2. Korrelationskoeffizienten sind ein Mass für den Einfluss der Streuung stochastischer Eingangsvariablen auf die Streuung von Ergebnisgrössen. Die Interpretation von Korrelationskoeffizienten ist aber schwierig, da Abweichungen in den geschätzten Streuungen einzelner Eingangsgrössen Einfluss auf die Korrelationskoeffizienten aller Variablen haben. Aus den Korrelationskoeffizienten können zwar die deterministischen Sensitivitäten der Variablen näherungsweise bestimmt werden, diese aber wiederum sind von den Streuungen der Eingangsgrössen unabhängig und benötigen zu ihrer Bestimmung keine aufwändigen probabilistischen Methoden.
3. Bei genauerer Untersuchung der physikalischen und geometrischen Zusammenhänge ist oftmals festzustellen, dass bestimmte Gruppen von stochastischen Variablen voneinander abhängig sind. Es ist ausserordentlich schwierig, diese Korrelation der Eingangsgrössen zu quantifizieren bzw. wirklich unabhängige stochastische Basisvariablen zu finden.
4. Der Validierung probabilistischer Auslegungsmethoden sind enge Grenzen gesetzt, da keine oder nur wenige (oft nicht repräsentative) Schadensereignisse auftreten. Dies trifft insbesondere für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten zu.

Weitere interessante Aspekte der Anwendbarkeit probabilistischer Verfahren in der Praxis werden in den Referenzen [13-16] diskutiert.

|                     | akzeptierte Ausfallwahrscheinlichkeiten | Referenzen |
|---------------------|---|------------|
| Industrie allgemein | $10^{-3}$ pro Jahr                      | [17, 18]   |
| öffentliche Anlagen | $10^{-4}$ pro Jahr                      | [17, 18]   |
| Flugzeugindustrie   | $10^{-7} - 10^{-9}$ pro Flugstunde      | [18-21]    |

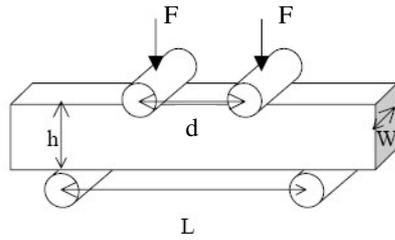
**Tabelle 1: Akzeptierte Ausfallwahrscheinlichkeiten.**

### Lebensdaueraussagen bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten

#### *Modellbeschreibung*

Abbildung 9 zeigt eine Vierpunktbiegeprobe die beispielsweise für Materialtests an keramischen Werkstoffen häufig verwendet wird. Im Gegensatz zu anderen Probegeometrien ist bei der Vierpunktbiegeprobe zwischen den symmetrischen Lastangriffspunkten das Biegemoment konstant, wodurch ein gleichmässiger Biegespannungszustand zwischen den Lastangriffspunkten erzeugt wird, Abbildung 10.

Die nachfolgend beschriebenen probabilistischen Untersuchungen wurden mit dem Excel basierten Programm @Risk durchgeführt. Aufgrund der einfachen analytischen Beschreibung des deterministischen Problems betragen die Rechenzeiten auch bei  $10^6$  Simulationen unter einer Stunde.



Geometrie      Elastizitätsmodul  
 w=4.5mm      E=300GPa  
 h=3.5mm  
 L=40mm      Belastung  
 d=20mm      F=91.875N

**Analytische Lösung**

Maximale Randfaserspannung

$$\sigma_{b,max} = \frac{3F(L-d)}{wh^2}$$

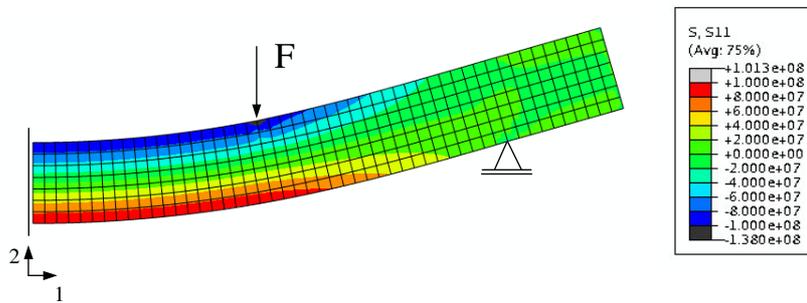
$$\sigma_{b,max} = 100MPa$$

Maximale Durchbiegung

$$u_{max} = \frac{FL^2(L-d)}{2Ewh^3} \left[ 1 + \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right]$$

$$u_{max} = 0.0035mm$$

**Abbildung 9: Vierpunktbiegeprobe.**



**Abbildung 10: Spannungsverteilung in der Vierpunktbiegeprobe.**

Zur Simulation der Streuung der maximalen Biegespannung wurden die Geometriegrößen h, w, L und d sowie die Belastung F variiert. Dabei wurden ausgehend von einer Dreiecksverteilung eine Normalverteilung und eine abgeschnittene Normalverteilung so gewählt, dass sich für die simulierten Eingabegrößen aller drei Verteilungstypen jeweils die gleichen Mittelwerte und die gleichen Standardabweichungen ergaben, Tabelle 2. In Abbildung 11 sind am Beispiel der stochastischen Variablen „Höhe h“ die verschiedenen Verteilungsfunktionen übereinandergelagt. Es wird deutlich, dass die so definierten Verteilungen sich kaum voneinander unterscheiden. Typische Messdaten aus der Praxis, wie z.B. in Abbildung 6 gezeigt, lassen aufgrund ihres beschränkten Datenumfanges (z.B. 70-90 Messdaten für Dickenmessungen) meistens keine genauen Aussagen über die „Schwänze“ der Verteilungsfunktionen zu. Eine dem Anwender überlassene Entscheidung zwischen Dreiecksverteilung, Normalverteilung und abgeschnittener Normalverteilung ist somit schwierig und gewissermassen willkürlich.

| stoch. Variable | Parameter Dreiecksverteilung |         |      |      | Parameter Normalverteilung |         |  |  | Parameter Normalverteilung abgeschnitten |         |      |      |
|-----------------|------------------------------|---------|------|------|----------------------------|---------|--|--|--|---------|------|------|
|                 |                              |         |      |      |                            |         |  |  |  |         |      |      |
| w [mm]          | 4.5                          | 4.1E-02 | 4.4  | 4.6  | 4.5                        | 4.1E-02 |  |  | 4.5                                      | 4.1E-02 | 4.4  | 4.6  |
| h [mm]          | 3.5                          | 4.1E-02 | 3.4  | 3.6  | 3.5                        | 4.1E-02 |  |  | 3.5                                      | 4.1E-02 | 3.4  | 3.6  |
| d [mm]          | 20                           | 4.1E-02 | 19.9 | 20.1 | 20                         | 4.1E-02 |  |  | 20                                       | 4.1E-02 | 19.9 | 20.1 |
| L [mm]          | 40                           | 4.1E-02 | 39.9 | 40.1 | 40                         | 4.1E-02 |  |  | 40                                       | 4.1E-02 | 39.9 | 40.1 |
| F [N]           | nicht verwendet              |         |      |      | 91.875                     | 0.46    |  |  | nicht verwendet                          |         |      |      |
| Rm [MPa]        | nicht verwendet              |         |      |      | 112.5                      | 2.5     |  |  | nicht verwendet                          |         |      |      |

Parameter: Mittelwert; Standardabweichung; untere Grenze; obere Grenze

**Tabelle 2: Parameter der verwendeten Verteilungsfunktionen.**

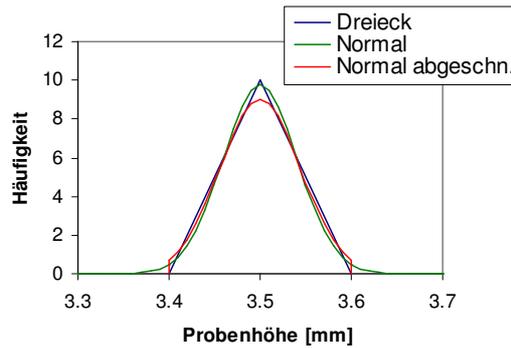


Abbildung 11: Verteilungsfunktionen für Höhe h.

Basierend auf den Verteilungsfunktionen der Geometriegrößen und der Kraft wurde die Streuung der maximalen Biegespannung  $\sigma_{b,max}$  bestimmt. Es wurde dann eine Verteilungsfunktion für die Festigkeit  $R_m$  eingeführt, deren Mittelwert sich um ungefähr die 4-fache Standardabweichung vom Mittelwert der berechneten maximalen Biegespannung unterscheidet, Abbildung 12. Auf diese Weise wurde gewährleistet, dass kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten in der Größenordnung von  $10^{-5}$  entstehen, die aber durchaus realistisch für industrielle Anforderungen sind.

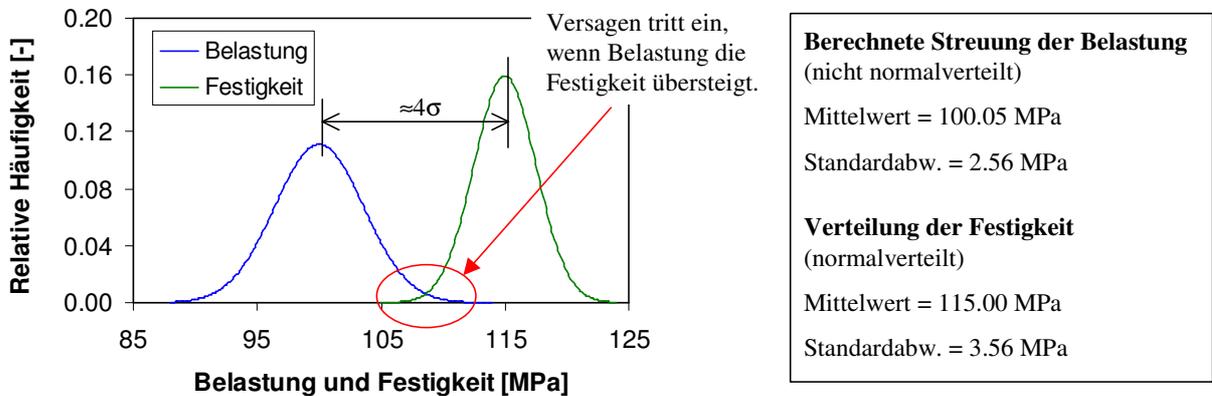


Abbildung 12: Verteilungsfunktion der Belastung und Festigkeit, Definition des Versagens.

*Auswertung der Ergebnisse*

Am Beispiel der beschriebenen Vierpunktbiegeprobe soll nun aufgezeigt werden, dass für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten die Ergebnisse der probabilistischen Analysen wesentlich von der Auswahl der Verteilungsfunktionen der Eingabegrößen, Abbildung 11, beeinflusst werden.

Abbildung 13 zeigt für den Fall normalverteilter Geometriegrößen die Verteilung der Ausfallfunktion  $\phi$ , die aus  $\phi = R_m - \sigma_{b,max}$  ermittelt wurde, d.h. ein Versagen der Probe liegt vor, wenn  $\phi < 0$ .

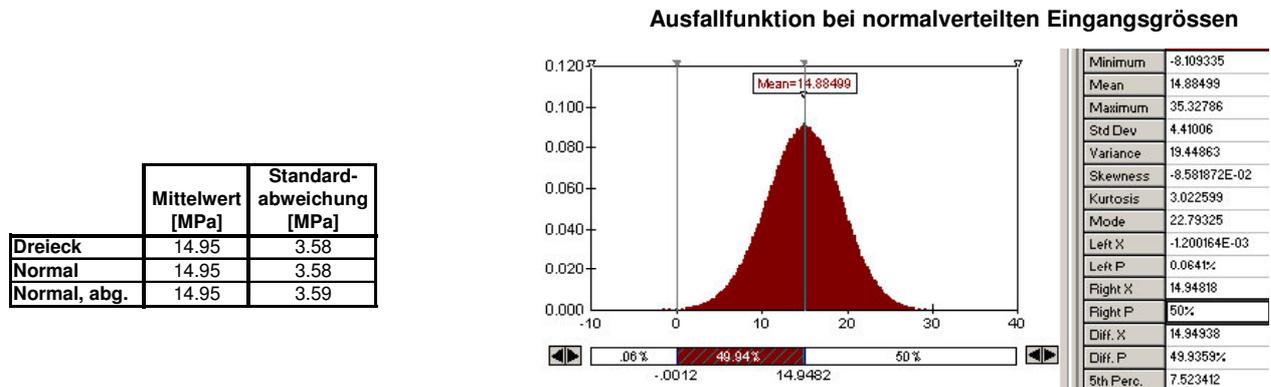


Abbildung 13: Berechnete Verteilung der Ausfallfunktion.

Ausserdem sind in Abbildung 13 die Mittelwerte und Standardabweichungen der (nicht normalverteilten) Ausfallfunktionen bei verschiedenen Verteilungsfunktionen der Eingangsgrössen bei  $10^6$  Monte-Carlo-Simulationen mit Latin-Hypercube-Sampling zusammengefasst.

Wie zu erwarten, unterscheiden sich die Verteilungen der Ausfallfunktion in den Mittelwerten nicht. Auch die Abweichung in den Standardabweichungen ist geringfügig. Trotzdem hat die Wahl der Verteilungsfunktionen der Eingangsgrössen entscheidenden Einfluss auf die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten, die in Tabelle 3 zusammengefasst sind. Für die untersuchte Vierpunktbiegeprobe lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Bei 1'000 Monte-Carlo-Simulationen mit Latin Hypercube Sampling ist für alle Verteilungsfunktionen der Eingangsgrössen die berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit Null. Erst bei 10'000 Simulationen wurden für normalverteilte Eingangsgrössen ein erster Ausfall berechnet (also eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $1 \times 10^{-4}$ ), was mit der jetzt vorhandenen Möglichkeit von „Ausreissern“ zu kleinen bzw. grossen Werten bei den Eingangsparametern erklärt werden kann. Bei  $10^5$  Simulationen werden auch bei abgeschnittenen Normalverteilungen und bei  $10^6$  Simulationen bei Dreiecksverteilungen der Geometriegrössen Ausfälle angezeigt.
- Betrachten wir ausschliesslich normalverteilte Eingangsgrössen, so schwanken die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten auch bei einer hohen Anzahl an Simulationen noch beträchtlich.
- Betrachten wir  $10^6$  Simulationen, so unterscheiden sich die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten je nach Verteilung der stochastischen Eingangsgrössen um den Faktor 4, Tabelle 3. Auch ein Vergleich zwischen den beiden begrenzten Verteilungen, d.h. der abgeschnittenen Normalverteilung und der Dreiecksverteilung, liefert noch immer einen Unterschied von 25% in der Ausfallwahrscheinlichkeit. Wenn man bedenkt, dass sich reale Messdaten besonders in den „Schwänzen“ nur unzureichend durch spezielle Verteilungsfunktionen darstellen lassen, so sind die berechneten Wahrscheinlichkeiten bei kleinen Ausfallraten bestenfalls grobe Schätzungen.

| Simulationen | Berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit |                       |                       |
|--------------|--------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
|              | Dreieck                              | Normal                | Normal, abg.          |
| 1'000        | 0                                    | 0                     | 0                     |
| 10'000       | 0                                    | $1.00 \times 10^{-4}$ | 0                     |
| 100'000      | 0                                    | $3.00 \times 10^{-5}$ | $2.00 \times 10^{-5}$ |
| 1'000'000    | $6.00 \times 10^{-6}$                | $2.60 \times 10^{-5}$ | $8.00 \times 10^{-6}$ |
| 5'000'000    | $7.60 \times 10^{-6}$                | $2.46 \times 10^{-5}$ | $8.60 \times 10^{-6}$ |

**Tabelle 3: Sensitivität der berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten bei verschiedener Anzahl von Simulationen und bei verschiedenen Verteilungsfunktionen der Eingangsgrösse.**

Selbstverständlich sind bei Auslegungsberechnungen an realen Bauteilen auf der Grundlage von Finite-Elemente-Analysen mehr als 1000 (besser weniger als 100) Simulationen unrealistisch. Bei Ausfallwahrscheinlichkeiten von  $10^{-5}$  müsste demnach bei gleicher Genauigkeit die Anzahl der benötigten Simulationen um den Faktor 100 bis 1000(!) reduziert werden. Aus Sicht der Autoren haben in diesem Zusammenhang adaptive Antwortflächenverfahren heute das grösste Potenzial, aber auch nur, wenn es gelingt, in jedem Fall eine hinreichende Genauigkeit der Antwortfläche zu gewährleisten.

### Sensitivität von Korrelationskoeffizienten

In den Abbildungen 14-16 sind die Rangkorrelationskoeffizienten und die Sensitivitäten der stochastischen Eingangsvariablen für die untersuchte Vierpunktbiegeprobe dargestellt. Es lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Geringe Abweichungen in den Verteilungsfunktionen der stochastischen Variablen, Abbildung 11, haben auch nur einen geringen Einfluss auf die berechneten Rangkorrelationskoeffizienten, Abbildung 14. Diese werden für praktische Anwendungen bereits mit wenigen 100 Simulationen hinreichend genau berechnet. Bei normalverteilten stochastischen Eingangsgrößen sind die Abweichungen der Rangkorrelationskoeffizienten bei 100 und bei  $10^6$  Simulationen im untersuchten Beispiel keiner als 15%, Abbildung 14.
- Wird hingegen für eine Geometriegröße die Standardabweichung verdoppelt oder gar verdreifacht (hier von  $h=3.5\pm 0.041\text{mm}$  auf  $h=3.5\pm 0.082\text{mm}$  bzw. auf  $h=3.5\pm 0.123\text{mm}$ ), hat dies wesentliche Auswirkungen auf die Rangkorrelationskoeffizienten aller stochastischen Variablen, Abbildung 15. Das Ergebnis war zu erwarten, da Rangkorrelationskoeffizienten sowohl die analytischen Sensitivitäten wie auch die Streuungen der stochastischen Variablen berücksichtigen. Variablen mit grosser Standardabweichung tragen daher stärker zur Streuung der Ergebnisgröße bei, als Variablen mit engem Toleranzbereich.

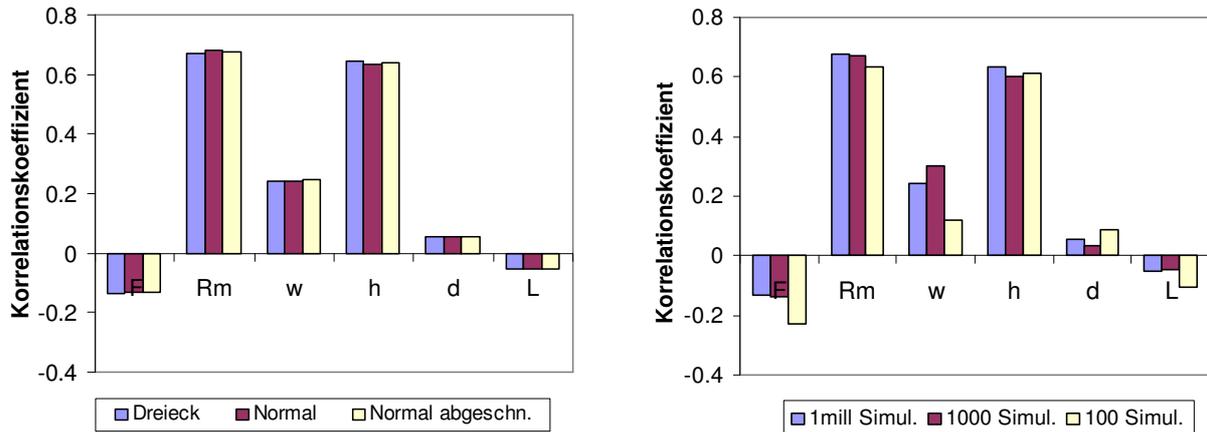


Abbildung 14: Einfluss der Verteilungsfunktionen und der Anzahl der Simulationen (bei normalverteilten Eingangsgrößen) auf die berechneten Rangkorrelationskoeffizienten.

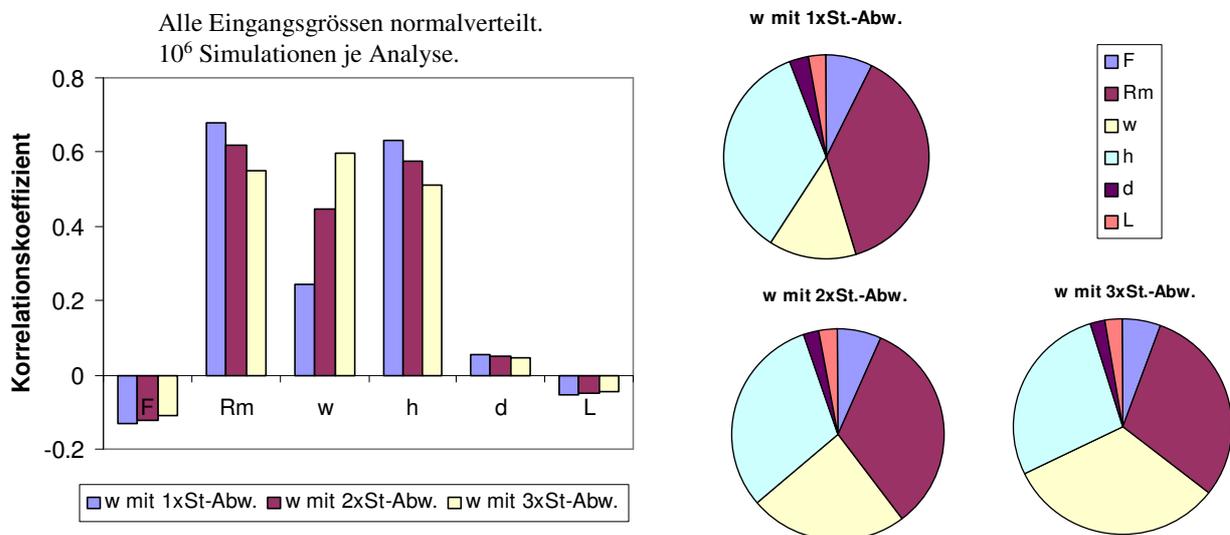


Abbildung 15: Einfluss der Standardabweichung der Eingangsgröße w auf den Korrelationskoeffizienten.

- Der Einfluss der Streuung der Eingangsgrößen auf den Rangkorrelationskoeffizienten weist auf folgende Problematik für den Anwender hin:
  - Der (lineare) Korrelationskoeffizient ist schwierig zu interpretieren. Er gibt lediglich an, inwieweit ein linearer Zusammenhang zwischen einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße herstellbar ist. Der Korrelationskoeffizient darf daher nicht mit der deterministischen Sensitivität einer Eingangsgröße (also der partiellen Ableitung der Ausgangsgröße nach der Eingangsgröße) verwechselt werden, wohl aber bezeichnen Korrelationskoeffizienten ein Mass, inwieweit Streuungen der stochastischen Variablen sich auf Streuungen von Ergebnisgrößen auswirken.
  - In Simulationsmodellen kommt es häufig vor, dass die Streuungen wesentlicher Eingangsgrößen nur grob geschätzt werden können. Vorausgesetzt die Mittelwerte sind hinreichend genau bekannt ist, so sind Abweichungen in den Streuungen um den Faktor 2-3 aufgrund der oftmals wenigen vorhandenen Messungen keine Seltenheit. Wie soll z.B. die Streuung der Wärmeübergangszahl an hochbelasteten Schaufeleintrittskanten im Maschinenbetrieb bestimmt werden?
  - Wenn die Streuung nur einer Eingangsvariable ungenau beschreibbar ist, hat dies Auswirkungen auf sämtliche Korrelationskoeffizienten des betrachteten Modells. Eine Auswertung einzelner Pie-Charts kann daher zu falschen Interpretationen führen. In diesem Zusammenhang wird vorgeschlagen, ähnlich wie im gezeigten Beispiel, Abbildung 15, die probabilistischen Simulationen mit verschiedenen (geschätzten) Streuungen durchzuführen, was allerdings den Simulationsaufwand noch mal wesentlich vergrößert.

Die deterministische Sensitivität  $\partial y / \partial x$  einer Eingangsgröße  $x$  lässt sich aus den Standardabweichungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  und dem Korrelationskoeffizienten  $r_{y,x}$  abschätzen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx r_{y,x} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Für die untersuchte Vierpunktbiegeprobe zeigt ein Vergleich von (exakten, deterministischen) analytischen und berechneten Sensitivitäten bereits nach 100 Simulationen gute Näherungswerte, Abbildung 16. Selbstverständlich werden deterministische Sensitivitäten nicht von den Streuungen der stochastischen Eingangsgrößen beeinflusst, d.h. unabhängig von der Standardabweichung ist in Abbildung 16 (rechts) die Sensitivität der Geometriegröße  $w$  konstant.

Die Bestimmung der deterministischen Sensitivitäten ist durchaus sinnvoll und sollte stets in Ergänzung zu den Rangkorrelationskoeffizienten durchgeführt werden. Fraglich ist nur, ob aufwändige probabilistische Verfahren für die Ermittlung der deterministischen Sensitivitäten

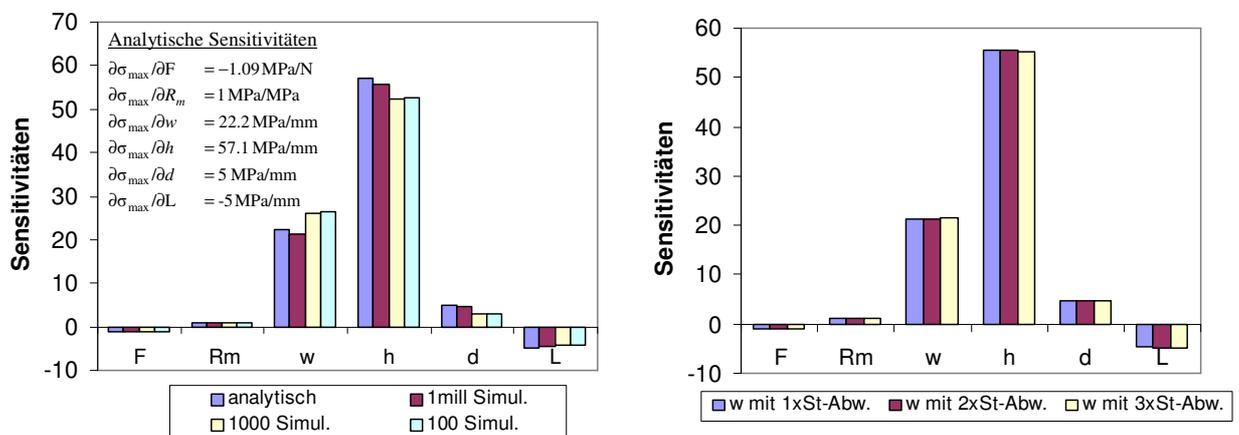


Abbildung 16: Vergleich von analytischen und berechneten Sensitivitäten.

gerechtfertigt sind. Eine effektivere und genauere Methoden in diesem Zusammenhang ist die numerische Berechnung der Differenzenquotienten, die mit lediglich  $n+1$  deterministischen Strukturanalysen auskommt ( $n$  ist dabei die Anzahl der betrachteten Eingangsvariablen). Für die untersuchte Vierpunktbiegeprobe werden daher lediglich 7 Simulationen für die Ermittlung der deterministischen Sensitivitäten in Abbildung 16 benötigt.

### Abhängigkeiten stochastischer Variablen

Eine zunächst zufällig erscheinende Streuung einer physikalischen Eigenschaft kann unter Umständen deterministisch beschrieben werden, wenn eine tiefere physikalische Betrachtungsweise berücksichtigt wird. So sind bei genauerer Untersuchung Materialeigenschaften wie Dichte, Elastizitätsmodul, thermische Leitfähigkeit und spezifische Wärmekapazität nicht voneinander unabhängig, sondern sie korrelieren mit den räumlichen Verteilungen von Porengrösse, Porenform und Porenorientierung, Abbildung 17. Im genannten Beispiel sind demnach die Poreneigenschaften die unabhängigen stochastischen Basisvariablen, während andere Materialeigenschaften wie Dichte, Elastizitätsmodul etc. mit diesen Basisvariablen korrelieren und dadurch auch untereinander eine gewisse Abhängigkeit besitzen. Eine ähnliche Situation tritt bei der Beschreibung von Festigkeitseigenschaften auf, die durch verschiedene Gefügeeigenschaften bis hin zu belastungsabhängigen Versetzungsbewegungen miteinander verbunden sind. Auch geometrische Streuungen sind nicht unbedingt voneinander unabhängig. In einer Turbinenschaufel ziehen beispielsweise Gusskernverschiebungen, -verdrehungen und -verbiegungen und deren Kombinationen an mehreren Messpunkten geometrische Abweichungen nach sich. Aus der Gesamtheit der Messungen ist es meist nur in Ausnahmefällen möglich, auf die zugrundeliegenden Ursachen zu schliessen, und diese dann durch entsprechende stochastische Basisvariablen realitätsnah zu modellieren.

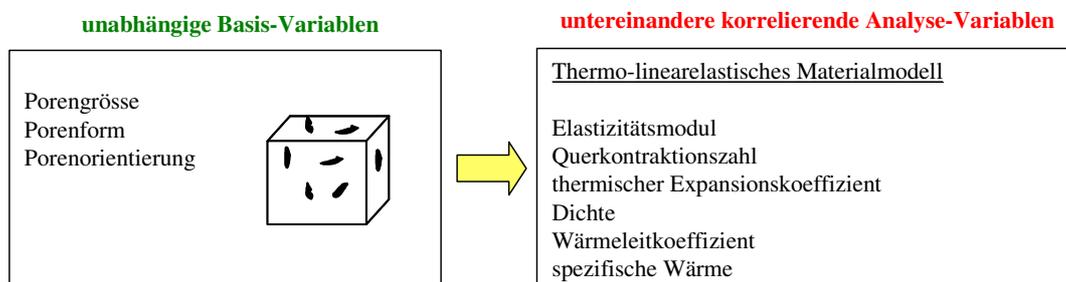


Abbildung 17: Stochastische Basis-Variablen und Analyse-Variablen.

### Validierung probabilistischer Methoden

Bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten ist die Validierung probabilistischer Simulationsmethoden ausserordentlich schwierig. Selbstverständlich sind mindestens ein Ausfall (besser jedoch 10 Ausfälle) für eine zuverlässige Validierung der Methode erforderlich. Andererseits sind ohne Validierung die Simulationsergebnisse zumindest fragwürdig und erreichen nur eine eingeschränkte Akzeptanz in einem technisch-wissenschaftlichen Umfeld.

Tabelle 4 zeigt die Anzahl der erforderlichen Datenpunkte für eine Validierung als Funktion der Ausfallwahrscheinlichkeit. Es wird dabei deutlich, dass im Turbomaschinenbau und insbesondere bei stationären Gasturbinen eine derart umfangreiche Datenbasis nicht zur Verfügung steht, da aufgrund kontinuierlicher technologischer Weiterentwicklungen in Form von Hardware-Änderungen (z.B. an Turbinenschaufeln), Materialentwicklungen, Anpassungen im Produktionsprozess, Turbinen-Upgrades und neuen Turbinen-Fahrkonzepten die Anzahl gleichartiger Bauteile bei grossen Gasturbinen beschränkt ist.

| Ausfall-wahrscheinlichkeit | Anzahl erforderlicher Datenpunkte | Anzahl der Ausfälle |
|----------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| $10^{-2}$                  | 1'00 -1'000                       | 1 - 10              |
| $10^{-3}$                  | 1'000 -10'000                     | 1 - 10              |
| $10^{-4}$                  | 10'000 -100'000                   | 1 - 10              |
| $10^{-5}$                  | 100'000 -1'000'000                | 1 - 10              |

**Tabelle 4: Erforderliche Anzahl der Datenpunkte bei vollständiger Validierung probabilistischer Methoden.**

## Zusammenfassung

Probabilistische Auslegungsmethoden werden seit vielen Jahren im Turbomaschinenbau in verschiedensten Anwendungsgebieten eingesetzt. Inzwischen sind mehrere kommerzielle Programmsysteme sowie Universitätssoftware verfügbar, die die Anwendung probabilistischer Methoden in der Strukturanalyse mit Finite-Elemente-Methoden unterstützen. Beim Einsatz probabilistischer Auslegungsmethoden zeigen sich, aus Sicht der Autoren, aber auch methodische Grenzen, die die Anwendbarkeit der Methode in der Entwicklung grosser stationärer Gasturbinen zumindest beschränken: Insbesondere liefern die geringe Stückzahl und die langen Lebensdauern und Inspektionsintervalle von grossen Gasturbinen wenig Erfahrungsrückfluss. Damit fehlen sowohl abgesicherte statistische Beschreibungen der streuenden Auslegungsparameter, wie sie für die Vorhersage kleiner Ausfallwahrscheinlichkeiten unbedingt erforderlich sind, als auch hinreichend viele Erfahrungswerte zur Validierung der Methode. Trotzdem, und das zeigen die dargestellten Beispiele im ersten Teil des Beitrages, erweitern probabilistische Auslegungsmethoden die Aussagemöglichkeit von bestehenden Simulationstechniken und tragen damit zur Verbesserung von Produkten bei.

## Referenzen

- [1] J. MARCZYK, Principles of simulation based computer aided engineering, FIM Publications, Barcelona, 1999.
- [2] J. MARCZYK, Statistical mechanical designs uncertainty management in CAE via Monte Carlo simulation, Benchmark, 11-15, Jan 1999.
- [3] J. WILL, H. BALDAUF, Integration rechnerischer Robustheitsbewertungen in die virtuelle Auslegung passiver Fahrzeugsicherheit bei der BMW AG, VDI Bericht Nr. 1976, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, 2006, Online verfügbar unter <http://www.dynardo.de>.
- [4] J. WILL, J.-ST. MÖLLER, E. BAUER, Robustheitsbewertungen des Fahrkomfortverhaltens an Gesamtfahrzeugmodellen mittels stochastischer Analyse, Weimarer Optimierungs- und Stochastiktage, 2004, Online verfügbar unter <http://www.dynardo.de>.
- [5] M. VOIGT, K. VOGELER, Probabilistische mechanische Auslegung von Turbinen, Abschlussbericht zum BMWi Vorhaben 0327091 Z, Juni 2005.
- [6] M. VOIGT, R. MÜCKE, K. VOGELER, M. OEVERMANN, Probabilistic lifetime analysis of turbine blades based on a combined direct Monte Carlo and response surface approach, ASME Publication, Paper No. GT2004-53439, ASME Turbo Expo 2004, Wien, June 14-17.
- [7] <http://www.cepba.upc.es/projects/promenvir.htm>
- [8] <http://www.cepba.upc.edu/ST-ORM/storm.htm>
- [9] R. MÜCKE, A. JOCKSCH, Probabilistische Design-Methoden und ihre Anwendung bei der strukturmechanischen Auslegung von Turbinenschaufeln, Technische Mechanik 20 (2000) 1, 61-72.
- [10] R. MÜCKE, A probabilistic design approach to lifetime prediction for turbine blades, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Barcelona 2000, 11-14 Sept., ISBN 84-89925-70-4.

- [11] R. MÜCKE, A. HEGER, R. KOCH, Application of probabilistic methods to gas turbine design, Proceedings 9<sup>th</sup> CAD-FEM User's conference, Zürich 2004, Sept 9-10.
- [12] H.-P. BOSSMANN, S. BACHEGOWDA, A. SCHNELL, Manufacturing optimization for bondcoat/thermal barrier coating systems, ASME Publication, Paper No. GT2008-51366, ASME Turbo Expo 2008, Berlin, June 9-13.
- [13] I. ELISHAKOFF, Possible limitations of probabilistic methods in engineering, Appl. Mech. Rev., vol 53, 19-36, Febr. 2000.
- [14] J. B. MENZIES, What researchers do and what practitioners need, Struct. Safety **21**, 349-356, 1999.
- [15] R. G. SEXSMITH, Probability-based safety analysis – value and drawbacks, Struct. Safety **21**, 303-310, 1999.
- [16] D. BLOCKLEY, Risk based structural safety methods in context, Structural Safety **21**, 335-348, 1999.
- [17] Reducing risks, protecting people – HSE's decision making process, Published by Health and Safety Executive (HSE), HSE Books, Sudbury, ISBN 0 7176 2151 0, 2001, Online verfügbar unter <http://www.hse.gov.uk/risk/theory/r2p2.pdf>.
- [18] JOANNA KAPPAS, Review of risk and reliability methods for aircraft gas turbine engines, DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, Victoria, Australia DSTO-TR-1306, 2002.
- [19] General Specification for aircraft gas turbine engines, Defence Standard 00-971, UK Ministry of Defence, 1987-05-29.
- [20] Federal Aviation Administration, Advisory circular – damage tolerance for high energy turbine rotors, U.S. Department of Transportation, AC 33.14-1, 2001.
- [21] Joint Aviation Requirements for Engines (JAR-E), Section 1, 2003.